

1 Convergence de séries à termes de signe constant

Exercice 1 ★ Majorations et équivalents - 1 –

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. u_n = \frac{n}{n^3 + 1} & 2. u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}} & 3. u_n = n \sin(1/n) \\ 4. u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) & 5. u_n = \frac{(-1)^n + n}{n^2 + 1} & 6. u_n = \frac{1}{n!} \\ 7. u_n = \frac{3^n + n^4}{5^n - 2^n} & 8. u_n = \frac{n+1}{2^n + 8} & 9. u_n = \frac{1}{\ln(n^2 + 1)} \end{array}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1109]

Exercice 2 ★★★★★ Équivalents et majorations - 2 –

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. u_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{\sqrt{n}} & 2. u_n = a^n n!, a \in \mathbb{R}_+ & 3. u_n = n e^{-\sqrt{n}} \\ 4. u_n = \frac{\ln(n^2 + 3) \sqrt{2^n + 1}}{4^n} & 5. u_n = \frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)} & 6. u_n = \left(\frac{1}{n} \right)^{1 + \frac{1}{n}} \\ 7. u_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!} \end{array}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1110]

Exercice 3 ★★ Puissances –

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

$$1. u_n = \frac{\ln(n^n)}{n!} \quad 2. u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} \quad 3. u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2889]

Exercice 4 ★★ Avec des paramètres - 1 –

Discuter, suivant la valeur des paramètres, la convergence des séries suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n}, a, b \in \mathbb{R} & 2. \cos \left(\frac{1}{n} \right) - a - \frac{b}{n}, a, b \in \mathbb{R}. \\ 3. \frac{1}{an+b} - \frac{c}{n}, a, b, c \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0) \end{array}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1113]

Exercice 5 ★★★★★ Inclassables –

Étudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = 1/n$ si n est un carré, et 0 sinon.
2. $u_n = \arctan(n+a) - \arctan(n)$, avec $a > 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1116]

Exercice 6 ★★★★★ Série des inverses des nombres premiers –

Soit $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite ordonnée des nombres premiers. Le but de l'exercice est d'étudier la divergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$. Pour $n \geq 1$, on pose $V_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$.

1. Montrer que la suite (V_n) est convergente si et seulement si la suite $(\ln V_n)$ est convergente.
2. En déduire que la suite (V_n) est convergente si et seulement si la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$ est convergente.
3. Démontrer que

$$V_n = \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^j} \right).$$

4. En déduire que $V_n \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$.
5. Quelle est la nature de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$?
6. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, quelle est la nature de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k^\alpha}$?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1120]

2 Convergence de séries à termes quelconques

Exercice 7 ★ Pour commencer ! –

Étudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. u_n = \frac{\sin n^2}{n^2} & 2. u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n} \\ 3. u_n = \frac{\cos(n^2 \pi)}{n \ln n} & \end{array}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1125]

Exercice 8 ★ Convergence absolue –

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n} \int_0^1 t^n f(t) dt$ est convergente.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1126]

Exercice 9 ★★ Une erreur classique... –

1. Démontrer que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2. Démontrer que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
3. Étudier la convergence de la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.
4. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1127]

Exercice 10 ★★★ Décomposition –

Étudier la convergence des séries de terme général :

$$\begin{array}{ll} 1. \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right) & 2. \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}, \alpha > 0 \\ 3. \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}. & \end{array}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1128]

Exercice 11 ★★★ En deux étapes –

Discuter la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n},$$

où a et b sont deux nombres complexes, $a \neq 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1129]

Exercice 12 ★★★★★ Discussion suivant un paramètre –

Suivant la position du point de coordonnées (x, y) dans le plan, étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{x^n}{y^n + n}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1130]

3 Comparaison à une intégrale

Exercice 13 ★ Somme partielle des séries de Riemann –

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Pour $\alpha < 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.
2. Pour $\alpha = 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1137]

Exercice 14 ★ Reste d'une série de Riemann –

Soit $\alpha > 1$. On note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

1. Soit $a > 0$. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha}.$$

2. En déduire un équivalent simple de R_n .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1138]

Exercice 15 ★★ Où sont les séries? –

Déterminer un équivalent simple de $\ln(n!)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1139]

Exercice 16 ★★★★★ Séries de Bertrand –

On souhaite étudier, suivant la valeur de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

1. Démontrer que la série converge si $\alpha > 1$.
2. Traiter le cas $\alpha < 1$.
3. On suppose que $\alpha = 1$. On pose $T_n = \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$.

Montrer si $\beta \leq 0$, alors la série de terme général u_n est divergente. Montrer que si $\beta > 1$, alors la suite (T_n) est bornée, alors que si $\beta \leq 1$, la suite (T_n) tend vers $+\infty$. Conclure pour la série de terme général u_n , lorsque $\alpha = 1$.

4. Montrer si $\beta \leq 0$, alors la série de terme général u_n est divergente.
 5. Montrer que si $\beta > 1$, alors la suite (T_n) est bornée, alors que si $\beta \leq 1$, la suite (T_n) tend vers $+\infty$.
 6. Conclure pour la série de terme général u_n , lorsque $\alpha = 1$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1115]

Exercice 17 ★★★★★ Trouver une limite –

Déterminer $\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1141]

4 Calcul de sommes

Exercice 18 ★ Somme télescopique –

Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}$. On justifiera la convergence de la série.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2886]

Exercice 19 ★★ Série télescopique... –

Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

(pour $n \geq 2$) est convergente, et calculer sa somme.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1144]

Exercice 20 ★★ A partir d'une série géométrique –

Soit $x \in]-1, 1[$. Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1145]

Exercice 21 ★★ Avec des exponentielles –

Sachant que $e = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$, déterminer la valeur des sommes suivantes :

$$1. \sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{n!} \quad 2. \sum_{n \geq 0} \frac{n^2-2}{n!} \quad 3. \sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{n!}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1146]

Exercice 22 ★★★★★ Série harmonique alternée –

1. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$, montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente et de somme $\ln 2$.

2. Sachant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$, retrouver d'une autre façon le résultat précédent.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1147]

Exercice 23 ★★★★★ Somme de la série des inverses des carrés –

Le but de l'exercice est de calculer $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$. Démontrer que

$$\int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

2. On pose $A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)$. Vérifier que, pour $t \in]0, \pi]$, on a

$$A_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2 \sin(t/2)}.$$

3. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}.$$

Vérifier alors que

$$\int_0^\pi (at^2 + bt) A_n(t) dt = S_n - \frac{\pi^2}{6}$$

où on a posé $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

4. Dédire des questions précédentes que $S_n \rightarrow \frac{\pi^2}{6}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1148]

5 Estimation des sommes partielles et du reste

Exercice 24 ★ Série alternée –

Écrire un algorithme sous Python donnant un encadrement à 10^{-5} près de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1151]

Exercice 25 ★★ Développement asymptotique de la série harmonique –

Pour $n \geq 1$, on définit le n -ième nombre harmonique par $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Démontrer que, pour tout $k \geq 1$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$$

et que, pour tout $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx.$$

2. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

3. Démontrer que $H_n \sim_{+\infty} \ln(n)$.

4. On considère les deux suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies, pour $n \geq 1$, par

$$u_n = H_n - \ln(n) \quad v_n = H_n - \ln(n+1).$$

Démontrer que ces deux suites sont adjacentes. On note γ leur limite commune.

5. En utilisant les suites (u_n) et (v_n) , écrire en langage Python une fonction prenant comme argument un nombre réel a strictement positif et renvoyant un encadrement de γ d'amplitude inférieure ou égale à a . On suppose que l'on dispose de la fonction `math.log()` pour le logarithme népérien.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3193]

Exercice 26 ★★★★★ **Très vite!** –

Soit pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{(2n-1)5^{2n-1}}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.
2. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrer que $R_n \leq \frac{25}{24}u_{n+1}$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ à 0,001 près.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1152]

Exercice 27 ★★★★★ **Décroissance très rapide à l'infini** –

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction de classe C^1 telle que f'/f tend vers $-\infty$ en $+\infty$. Montrer que la série $\sum_n f(n)$ converge et donner un équivalent, lorsque $n \rightarrow +\infty$, de $R_n = \sum_{k \geq n} f(k)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1156]

6 Applications

Exercice 28 ★ **Equivalent d'une suite récurrente grâce aux séries** –

On considère une suite (u_n) donnée par $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}u_n$ pour $n \geq 1$.

1. Démontrer que (u_n) converge.
2. On pose, pour $n \geq 1$, $v_n = \ln(n^{1/3}u_n)$.
Démontrer que $v_{n+1} - v_n = -\frac{2}{9n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En déduire que la série de terme général $(v_{n+1} - v_n)$ converge.
En déduire que la suite (v_n) converge. On notera λ sa limite.
3. Démontrer que $v_{n+1} - v_n = -\frac{2}{9n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
4. En déduire que la série de terme général $(v_{n+1} - v_n)$ converge.
5. En déduire que la suite (v_n) converge. On notera λ sa limite.
6. Donner un équivalent simple de (u_n) . La série de terme général u_n est-elle convergente?
7. La série de terme général $(-1)^n u_n$ est-elle convergente?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2606]

Exercice 29 ★★★★★ **Formule de Stirling** –

1. Soit (x_n) une suite de réels et soit (y_n) définie par $y_n = x_{n+1} - x_n$. Démontrer que la série $\sum_n y_n$ et la suite (x_n) sont de même nature.

2. On pose (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

3. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$n! \sim_{+\infty} C \sqrt{n} n^n e^{-n}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1160]

Exercice 30 ★★★★★ **Relation suite/série** –

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

On fixe $\beta \in \mathbb{R}$ et on pose

$$v_n = \ln((n+1)^\beta u_{n+1}) - \ln(n^\beta u_n).$$

1. Pour quel(s) $\beta \in \mathbb{R}$ y a-t-il convergence de la série de terme général v_n ?
2. En déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ pour lequel $u_n \sim_{+\infty} A n^\alpha$.

Exercice 31 ★★★★★ Irrationalité –

On rappelle que $\cos(1)$ est défini par la série $\cos(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$. Montrer que $\cos(1)$ est irrationnel.

Indication ▼ Correction ▼

[1163]

7 Exercices théoriques

Exercice 32 ★ Théorème des gendarmes pour les séries –

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour chaque $n \geq 0$. On suppose que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n w_n$ sont convergentes. Démontrer que la série $\sum_n v_n$ est convergente.

Indication ▼ Correction ▼

[1166]

Exercice 33 ★ Produit de racines carrées et maximum –

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives. On suppose que les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent. Prouver la convergence de $\sum_n \sqrt{u_n v_n}$ et de $\sum_n \max(u_n, v_n)$.

Indication ▼ Correction ▼

[1167]

Exercice 34 ★ Avec une puissance –

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs.

1. On suppose que $\sum_n u_n$ converge. Prouver que, pour tout $\alpha > 1$, $\sum_n u_n^\alpha$ converge.
2. On suppose que $\sum_n u_n$ diverge. Prouver que, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $\sum_n u_n^\alpha$ diverge.

Indication ▼ Correction ▼

[1168]

Exercice 35 ★★ Deux séries de même nature –

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On pose $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.

1. Prouver que la fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est croissante sur $[0, +\infty[$.
2. Démontrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature.

Indication ▼ Correction ▼

[1169]

Exercice 36 ★★ Terme général positif et décroissant –

Soit (u_n) une suite positive et décroissante. Prouver que si la série $\sum_n u_n$ est convergente, alors (nu_n) tend vers 0.

Indication ▼ Correction ▼

[1170]

Exercice 37 ★★★★★ Condensation... –

Soit (u_n) une suite décroissante positive. Montrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

Indication ▼ Correction ▼

[1172]

Exercice 38 ★★★★★ Règle de d'Alembert –

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow l.$$

1. On suppose $l < 1$ et on fixe $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$.

Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on a

$$u_n \leq (l + \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}.$$

En déduire que $\sum_n u_n$ converge.

2. Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on a

$$u_n \leq (l + \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}.$$

3. En déduire que $\sum_n u_n$ converge.

4. On suppose $l > 1$. Démontrer que $\sum_n u_n$ diverge.

5. Étudier le cas $l = 1$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1173]

Indication pour l'exercice 1 ▲

1. Comparer à une série de Riemann.
 2. Comparer à une série de Riemann.
 3. Quelle est la limite du terme général ?
 4. Utiliser un équivalent de $\ln(1+x)$ en 0.
 5. Comparer à une série de Riemann.
 6. $n! \geq 2^{n-1}$.
 7. Utiliser un équivalent à une série géométrique
 8. Trouver un équivalent et majorer par une série géométrique.
 9. Minorer par une série de Riemann divergente.
-

Indication pour l'exercice 2 ▲

Indication pour l'exercice 3 ▲

1. $\ln(n^n) = n \ln n$, puis il y a des simplifications...
 - 2.
 - 3.
-

Indication pour l'exercice 4 ▲

Faire un développement limité du terme général, puis discuter suivant ce qui se passe.

Indication pour l'exercice 5 ▲

1. Se ramener à la somme des $1/k^2$, pour des bornes bien choisies.
 2. Utiliser l'inégalité des accroissements finis, ou faire un développement limité de \arctan au voisinage de $+\infty$ en utilisant la formule $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$.
-

Indication pour l'exercice 6 ▲

1. Il suffit de composer les limites, en vérifiant que si (V_n) converge, sa limite est strictement positive.
 2. Écrire $\ln(V_n)$ comme la somme partielle d'une série, et trouver un équivalent simple du terme général de cette série.
 3. Il s'agit juste de l'identité $\frac{1}{1-x} = \sum_{k \geq 0} x^k$.
 4. Dans le développement du produit précédent, on fait apparaître les termes $1/j$, avec j n'importe quel entier qui s'écrit $p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$.
 5. Résumer les questions précédentes.
 6. Distinguer $\alpha > 1$ et $\alpha \leq 1$.
-

Indication pour l'exercice 7 ▲

1. Convergence absolue.
 2. Critère spécial des séries alternées.
 3. Se ramener au critère des séries alternées.
-

Indication pour l'exercice 8 ▲

Étudier la convergence absolue. Utiliser le fait que f est bornée sur $[0, 1]$.

Indication pour l'exercice 9 ▲

1. Ceci est une conséquence directe du critère des séries alternées.
2. Faire un développement limité en mettant \sqrt{n} en facteur au dénominateur.

3. Le terme général de la série s'écrit comme la somme de 2 suites. La série associée à l'une de ces suites est convergente et l'autre est divergente. Que conclure ?
4. On a deux séries dont les termes généraux sont équivalents.
-

Indication pour l'exercice 10 ▲

Faire un développement limité du terme général, jusqu'à trouver un terme à signe constant, ou jusqu'à trouver un terme négligé qui est absolument convergent. Etudier alors les séries juste avant individuellement. Si toutes les séries convergent, la série initiale convergera. Si toutes les séries convergent sauf une, la série initiale divergera. Attention aux pièges suivants :

Utiliser le critère des séries alternées pour la série de départ. Ecrire que le terme général est équivalent au terme général d'une série qui n'est pas de signe constant.

Indication pour l'exercice 11 ▲

Séparer les cas $|b| \leq 1$ et $|b| > 1$. Trouver un équivalent facile de la suite (u_n) , puis étudier la série associée.

Indication pour l'exercice 12 ▲

Indication pour l'exercice 13 ▲

Comparer à une intégrale ! Pour la première question, on séparera les cas $\alpha \leq 0$ et $\alpha > 0$.

Indication pour l'exercice 14 ▲

1. Il suffit d'intégrer.
 2. Comparer à une intégrale.
-

Indication pour l'exercice 15 ▲

Écrire

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln(k)$$

puis comparer à une intégrale.

Indication pour l'exercice 16 ▲

1. Comparer avec $\frac{1}{n^\gamma}$ pour $1 < \gamma < \alpha$.
 2. Comparer avec $\frac{1}{n}$.
 3. Comparer à $\frac{1}{n}$. On peut trouver une primitive de la fonction à intégrer (attention au cas où $\beta = 1$!). Comparaison à une intégrale.
 4. Comparer à $\frac{1}{n}$.
 5. On peut trouver une primitive de la fonction à intégrer (attention au cas où $\beta = 1$!).
 6. Comparaison à une intégrale.
-

Indication pour l'exercice 17 ▲

Encadrer la somme par comparaison à une intégrale, pour tout $a \in \mathbb{R}$, puis passer à la limite...

Indication pour l'exercice 18 ▲

Écrire $\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n+1)}$. Calculer alors les sommes partielles en remarquant que de nombreux termes vont se simplifier !

Indication pour l'exercice 19 ▲

Écrire la somme de façon étendue, et voir que de nombreuses simplifications ont lieu (on peut aussi utiliser des changements d'indice).

Indication pour l'exercice 20 ▲

Dériver une somme $\sum_{k=0}^n x^k$.

Indication pour l'exercice 21 ▲

Pour les termes du type n^p , on les écrira en fonction de $n(n-1)\cdots(n-p+1)$ pour que les simplifications se passent bien !

Indication pour l'exercice 22 ▲

Prouver par récurrence que la dérivée n -ième de $f(t) = \ln(1+t)$ est :

$$f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+t)^n}.$$

Pour 2, faire la somme dans l'intégrale (série géométrique), et permuter limite et intégrale.

Indication pour l'exercice 23 ▲

1. Faire une intégration par parties.
 2. Ecrire que $\cos(nt) = \Re(e^{int})$.
 3. Calcul par double IPP.
 - 4.
-

Indication pour l'exercice 24 ▲

Comment majorer le reste d'une série alternée ?

Indication pour l'exercice 25 ▲

1. Utiliser la décroissance de la fonction $x \mapsto 1/x$.
 2. Sommer les inégalités précédentes pour k allant de 1 à n ou de 2 à n .
 3. Diviser par $\ln(n)$ l'inégalité précédente.
 - 4.
 - 5.
-

Indication pour l'exercice 26 ▲

1. Appliquer un critère bien choisi.
 2. Montrer que $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{1}{25}$.
 3. Chercher n pour que $R_n < 0,001$.
-

Indication pour l'exercice 27 ▲

La première chose à faire est d'intégrer f'/f pour obtenir des estimations de f . On pourra ensuite prouver que R_n est équivalent à $f(n)$.

Indication pour l'exercice 28 ▲

- 1.
-

2. Utiliser les propriétés du logarithme et faire un développement limité. Comparaison à une série de Riemann. Lien série télescopique/suites.
 3. Utiliser les propriétés du logarithme et faire un développement limité.
 4. Comparaison à une série de Riemann.
 5. Lien série télescopique/suites.
 6. Passer à l'exponentielle.
 7. Critère des séries alternées.
-

Indication pour l'exercice 29 ▲

Faire un développement limité de v_n pour en déterminer la nature. On doit trouver :

$$v_n = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Le retour à la suite (u_n) se fait en remarquant que $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. La somme partielle de la série $\sum_n v_n$ s'exprime donc facilement en fonction de $\ln(u_n)$.

Indication pour l'exercice 30 ▲

1. Écrire v_n comme le logarithme d'un quotient, et faire un développement limité.
 2. La série correspond à une somme "télescopique".
-

Indication pour l'exercice 31 ▲

Utiliser le critère des séries alternées pour encadrer $\cos(1)$, puis prouver que $(4n-2)!\cos(1)$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs.

Indication pour l'exercice 32 ▲

On pourra réécrire l'égalité sous la forme $0 \leq v_n - u_n \leq w_n - u_n$ puis utiliser des propriétés des séries à termes positifs.

Indication pour l'exercice 33 ▲

Majorer!!!

Indication pour l'exercice 34 ▲

1. $u_n^\alpha \leq u_n \dots$
 2. Dans l'autre sens, en tout cas si $u_n \rightarrow 0$.
-

Indication pour l'exercice 35 ▲

1. Étudier la fonction.
 2. Distinguer les cas $u_n \rightarrow 0$ et (u_n) ne tend pas vers 0.
-

Indication pour l'exercice 36 ▲

S'inspirer de la preuve que la série $\sum_n 1/n$ est divergente.

Indication pour l'exercice 37 ▲

Utiliser l'inégalité

$$2^k u_{2^{k+1}} \leq (2^{k+1} - 2^k) u_{2^{k+1}-1} \leq u_{2^k} + \dots + u_{2^{k+1}-1} \leq (2^{k+1} - 2^k) u_{2^k} \leq 2^k u_{2^k}.$$

Indication pour l'exercice 38 ▲

1. Théorème d'encadrement.
 - 2.
 3. Théorème d'encadrement.
 4. Prendre $l - \varepsilon > 1$.
 5. Penser aux suites $u_n = n^\alpha$.
-

Correction de l'exercice 1 ▲

1. On a

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série est convergente.

2. Le raisonnement est identique :

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

et par comparaison à une série de Riemann convergente, la série est convergente.

3. On a $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(1/n) = 1$ (rappelons que $\sin x \sim_0 x$) et la série est grossièrement divergente (son terme général ne tend pas vers 0).

4. Puisque $\ln(1+x) \sim_0 x$, on obtient

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n},$$

et la série est donc divergente par comparaison à une série de Riemann divergente.

5. On a $(-1)^n + n \sim_{+\infty} n$ et $n^2 + 1 \sim_{+\infty} n^2$, et donc

$$\frac{(-1)^n + n}{n^2 + 1} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum_n u_n$ est divergente.

6. Il suffit de remarquer que, pour $n \geq 2$, $n! \geq 2^{n-1}$ (ceci se démontre aisément par récurrence par exemple). On en déduit que

$$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Par comparaison à une série géométrique convergente, la série converge.

7. Il est facile de vérifier que $3^n + n^4 \sim_{+\infty} 3^n$ et que $5^n - 2^n \sim_{+\infty} 5^n$. On en déduit que

$$\frac{3^n + n^4}{5^n - 2^n} \sim_{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Par comparaison à une série géométrique convergente (tout est positif), on en déduit que la série converge.

8. Il est facile de vérifier que $u_n \sim_{+\infty} \frac{n}{2^n}$. Or la série $\sum \frac{n}{2^n}$ converge. En effet, par croissance comparée des polynômes et des puissances, on sait que

$$\frac{n}{(1.5)^n} \leq 1$$

pour n assez grand, et donc que

$$\frac{n}{2^n} \leq \left(\frac{1.5}{2}\right)^n.$$

Puisque $1.5/2 < 1$, on sait que $\sum \left(\frac{1.5}{2}\right)^n$ est convergente. On peut aussi utiliser la règle de D'Alembert pour prouver la convergence de la série de terme général $v_n = \frac{n}{2^n}$. En effet, $v_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+1}{2n} \rightarrow 1/2 < 1.$$

9. On sait que

$$\frac{\sqrt{n}}{\ln(n^2 + 1)} = \frac{\sqrt{n}}{2\ln(n) + \ln(1 + n^{-2})} \rightarrow +\infty.$$

En particulier, pour n assez grand,

$$\frac{1}{\ln(n^2 + 1)} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Puisque la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, il en est de même de $\sum \frac{1}{\ln(n^2 + 1)}$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. On écrit $(\frac{1}{2})^{\sqrt{n}} = \exp(-\sqrt{n} \ln 2)$ et on en déduit :

$$n^2 u_n = \exp(2 \ln n - \sqrt{n} \ln 2) = \exp\left(-\sqrt{n} \left(\ln 2 - 2 \frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Il résulte de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$ que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{n} \left(\ln 2 - 2 \frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right) = -\infty$$

soit par composition des limites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 0,$$

ou encore $u_n = o(1/n^2)$. Par comparaison à une série de Riemann, la série est convergente.

2. Par croissance comparée des suites géométriques et de la suite factorielle, le terme général ne tend pas vers 0, sauf si $a = 0$. La série $\sum_n u_n$ est donc convergente si et seulement si $a = 0$.

3. On écrit tout sous forme exponentielle :

$$n e^{-\sqrt{n}} = \exp(\ln n - \sqrt{n}).$$

On a alors

$$\frac{\exp(\ln n - \sqrt{n})}{\exp(-2 \ln n)} = \exp(3 \ln n - \sqrt{n}) \rightarrow 0$$

et donc

$$n e^{-\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série est convergente.

4. On vérifie aisément que

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{2 \ln n}{(4/\sqrt{2})^n}.$$

Puisque $4/\sqrt{2} > 2$, on obtient

$$u_n = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

et donc la série est convergente.

5. On remarque que $0 < \ln(e^n - 1) \leq \ln(e^n) = n$. Ainsi, pour $n \geq 3$,

$$u_n \geq \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n},$$

et donc la série de terme général u_n diverge.

6. On a

$$n u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \exp\left(-\frac{\ln n}{n}\right) \rightarrow \exp(0) = 1.$$

Ainsi, $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ et la série est divergente.

7. Le numérateur et le dénominateur s'écrivent comme des produits faisant apparaître chacun $3n$ facteurs.

On a de plus

$$\begin{aligned} \frac{1 \times \cdots \times n \times 1 \times \cdots \times n \times 1 \times \cdots \times n}{1 \times \cdots \times n \times (n+1) \times \cdots \times (2n) \times (2n+1) \times \cdots \times (3n)} &\leq \frac{1 \times \cdots \times n}{(2n+1) \times \cdots \times (3n)} \\ &\leq \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\sum 2^{-n}$ converge, on en déduit par comparaison que $\sum_n \frac{(n!)^3}{(3n)!}$ converge.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. On a, pour $n \geq 2$.

$$u_n = \frac{n \ln(n)}{n!} = \frac{\ln n}{(n-1)!}.$$

Mais on sait aussi que $\ln(1+x) \leq x$ pour $x \geq 0$ et donc $\ln(n) = \ln(1+(n-1)) \leq n-1$. Il vient

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{(n-2)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

pour n assez grand. On en déduit que la série est convergente.

2. On écrit tout dans une seule exponentielle :

$$u_n = \frac{\exp((\ln n)^2)}{\exp(n \ln \ln n)} = \exp(-n \ln \ln n + (\ln n)^2).$$

Or,

$$\frac{-n \ln \ln n + (\ln n)^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty.$$

En particulier, pour n assez grand, on a $-n \ln \ln n + (\ln n)^2 \leq -n$ et donc par croissance de la fonction exponentielle,

$$0 \leq u_n \leq e^{-n}.$$

Par majoration par une série géométrique convergente, la série de terme général u_n converge.

3. On écrit

$$u_n = \frac{1}{\exp(\ln n \ln \ln n)}.$$

Pour n assez grand, $\ln n \ln \ln n \geq 2 \ln n$ et donc

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{\exp(2 \ln n)} = \frac{1}{n^2}.$$

Par majoration par une série de Riemann convergente, la série de terme général u_n converge.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. On réalise un développement limité du terme général :

$$e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} = (1-a) + \frac{1-b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si $a \neq 1$, alors $e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} \rightarrow (1-a) \neq 0$ et la série diverge. Si $a = 1$ et $b \neq 1$, alors $e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} \sim_{+\infty} \frac{1-b}{n}$ et la série diverge. Si $a = 1$ et $b = 1$, alors $e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série converge.

2. Avec un raisonnement similaire, en notant u_n le terme général,

$$u_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) - a - \frac{b}{n} = (1-a) - \frac{b}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si $a \neq 1$, alors $u_n \rightarrow 1-a \neq 0$ et la série diverge (grossièrement). Si $a = 1$ et $b \neq 0$, alors $u_n \sim_{+\infty} \frac{-b}{n}$ et par comparaison à une série de Riemann divergente, la série diverge. Si $a = 1$ et $b = 0$, alors $u_n \sim_{+\infty} \frac{-1}{2n^2}$ et par comparaison à une série de Riemann convergente, la série converge. Dans ce cas, la série converge donc si et seulement si $a = 1$ et $b = 0$.

3. Remarquons d'abord que si $b = 0$, alors le terme général de la série est $\left(\frac{1}{a} - c\right) \frac{1}{n}$ et donc que la série converge si et seulement si $ac = 1$. Supposons maintenant $b \neq 0$. Si $a = 0$, le terme général de la série tend vers

$\frac{1}{b} \neq 0$ et donc la série diverge grossièrement. On peut donc supposer que $a \neq 0$. Dans ce cas, un développement limité donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{an+b} - \frac{c}{n} &= \frac{1}{an} \left(\frac{1}{1 + \frac{b}{an}} \right) - \frac{c}{n} \\ &= \frac{1}{an} \left(1 - \frac{b}{an} \right) - \frac{c}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{a} - c\right) \frac{1}{n} - \frac{b}{a^2 n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Si $ac \neq 1$, alors le terme général est équivalent à $\left(\frac{1}{a} - c\right) \frac{1}{n}$ et donc on a divergence par comparaison à une série de Riemann divergente. Si $ac = 1$, alors le terme général est équivalent à $\frac{b}{a^2 n^2}$ et on a convergence par comparaison à une série de Riemann convergente. En résumé, on a convergence si et seulement si $ac = 1$.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Pour tout entier naturel N , on a :

$$S_N = \sum_{n=1}^N u_n = \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \frac{1}{k^2}.$$

La suite (S_N) est donc croissante, et majorée par la somme de la série convergente $\sum_1^\infty 1/k^2$. On en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente.

2. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$0 \leq u_n \leq \frac{a}{1+n^2}.$$

La série à terme général positif $\sum u_n$ est convergente.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Si la suite (V_n) est convergente, notons v sa limite. Il est clair que $v \geq 1$ puisque, pour chaque k , $\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \geq 1$.

Alors, par composition des limites, $(\ln(V_n))$ converge vers $\ln(v)$ (le point clé est ici de remarquer que v est strictement positif, pour que $(\ln(V_n))$ admette bien une limite finie). La réciproque se prouve en composant avec l'exponentielle.

2. Étudions donc la suite $(\ln(V_n))$. On a

$$\ln(V_n) = \sum_{k=1}^N \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}\right) = \sum_{k=1}^N -\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Dire que la suite $(\ln(V_n))$ est convergente équivaut donc à dire que la série de terme général $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ est convergente. Mais on a

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{p_k}.$$

Puisque $\frac{1}{p_k}$ est positif, alors la convergence de la série de terme général $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ est équivalente à la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$. Ainsi, utilisant le résultat de la première question, la suite (V_n) converge si et seulement si la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$ converge.

3. Il suffit de remarquer que $0 < \frac{1}{p_k} < 1$ pour tout entier k et donc que, d'après la formule pour une somme géométrique, on a

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{p_k^j}.$$

4. Il y a deux observations à faire :

pour tout $1 \leq j \leq n$, le développement en facteurs premier de j ne fait apparaître que des nombres premiers inférieurs ou égaux à p_n : $j = \prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i}$ avec $n \leq p_n$ (dans cette écriture, certains α_i peuvent être nuls). Lorsque l'on développe le produit

$$(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots)(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots) \dots (1 + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n^2} + \dots)$$

on se retrouve avec la somme $\sum_{\alpha_1=0}^{+\infty} \dots \sum_{\alpha_n=0}^{+\infty} \frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}}$.

En combinant les deux observations, on remarque qu'on obtient au moins tous les termes de la forme $j \leq n$, d'où l'inégalité annoncée.

5. pour tout $1 \leq j \leq n$, le développement en facteurs premier de j ne fait apparaître que des nombres premiers inférieurs ou égaux à p_n : $j = \prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i}$ avec $n \leq p_n$ (dans cette écriture, certains α_i peuvent être nuls).

6. Lorsque l'on développe le produit

$$(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots)(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots) \dots (1 + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n^2} + \dots)$$

on se retrouve avec la somme $\sum_{\alpha_1=0}^{+\infty} \dots \sum_{\alpha_n=0}^{+\infty} \frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}}$.

7. D'après la question précédente, puisque la série $\sum_j \frac{1}{j}$ est divergente, il en est de même de la suite (V_n) . Ceci entraîne la divergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$.

8. Si $\alpha \leq 1$, alors $\frac{1}{p_k^\alpha} \geq \frac{1}{p_k}$. On en déduit que la série $\sum_k \frac{1}{p_k^\alpha}$ est divergente. Si $\alpha > 1$, alors $\frac{1}{p_k^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$. La série $\sum_k \frac{1}{p_k^\alpha}$ est alors convergente.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. On a :

$$|u_n| \leq \frac{1}{n^2},$$

et la série converge absolument.

2. La série est alternée, et le module du terme général décroît vers 0 à partir d'un certain rang : la série converge par application du critère des séries alternées.

3. Il s'agit d'une série alternée bien cachée. En effet, n^2 a la parité de n , et $\cos(k\pi) = (-1)^k$. Le terme général vaut donc $u_n = \frac{(-1)^n}{n \ln n}$. La série converge par application immédiate du critère spécial des séries alternées.

Correction de l'exercice 8 ▲

On va montrer que cette série est absolument convergente. Puisque f est continue sur le segment $[0, 1]$, elle y est bornée par M , et on a :

$$|u_n| \leq \frac{M}{n} \int_0^1 t^n dt \leq \frac{M}{n(n+1)}.$$

La série de terme général (u_n) est absolument convergente.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Ceci est une conséquence directe du critère des séries alternées. La série est alternée, et la valeur absolue du terme général décroît vers zéro.

2. On écrit que

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

3. Notons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$, $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $w_n = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Notons U_n , V_n , W_n leurs sommes partielles respectives. Alors (V_n) est convergente (par le critère des séries alternées), (W_n) est divergente (puisque $w_n \sim \frac{-1}{n}$). Donc (U_n) est somme de deux séries convergentes et d'une suite divergente. Elle est donc divergente. Autrement dit, la série de terme général u_n est divergente.

4. Bien que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \sim_{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, l'une des deux séries converge et l'autre diverge. Dans le théorème de comparaison de deux séries, on ne peut donc pas se passer de l'hypothèse que les termes généraux gardent le même signe. Une autre conclusion est que $u_n = (-1)^n a_n$, avec $a_n \geq 0$, (a_n) tend vers 0, et pourtant $\sum_n u_n$ diverge. Dans le critère des séries alternées, on ne peut donc pas se passer de l'hypothèse (a_n) décroît.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Le développement limité de u_n donne :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{(-1)^n}{2n+1} + v_n,$$

où $v_n \sim \frac{-1}{8n^2}$. Maintenant, la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge par application du critère spécial des séries alternées, et la série $\sum v_n$, à terme général de signe constant, converge elle aussi (série de Riemann). La série $\sum u_n$ est convergente comme somme de deux séries convergentes.

2. Faisons un développement limité du terme général u_n au voisinage de $+\infty$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + v_n,$$

où $v_n = o\left(n^{-3\alpha/2}\right)$. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées. La série u_n a donc le même comportement que la série de terme général :

$$w_n = -\frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + v_n.$$

Maintenant, $w_n \sim_{\infty} \frac{-1}{2n^{3\alpha/2}}$ qui ne change pas de signe. Autrement dit, le comportement de la série de terme général u_n est le même que celui de la série de terme général $\frac{1}{n^{3\alpha/2}}$. On en déduit que la série diverge pour $0 < \alpha \leq \frac{2}{3}$ et converge pour $\alpha > \frac{2}{3}$.

3. Remarquons d'abord que si $\alpha = \beta$, u_n n'est pas défini pour n impair. Supposons donc $\alpha \neq \beta$.

Si $\alpha < \beta$, en factorisant par $(-1)^n n^\beta$ au dénominateur, on peut écrire $u_n = \frac{1}{n^\beta (1 + (-1)^n n^{\alpha-\beta})}$. Ainsi, u_n est définie pour $n \geq 2$, et positif; en outre, $u_n \sim \frac{1}{n^\beta}$. La série converge dans ce cas si et seulement si $\beta > 1$. Si $\alpha > \beta$, le terme dominant n'est plus le même, et on écrit désormais :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha (1 + (-1)^n n^{\beta-\alpha})}.$$

On voit ainsi que u_n est bien définie pour $n \geq 2$, et c'est une série alternée. On a $|u_n| \sim \frac{1}{n^\alpha}$, en conséquence :

Pour $\alpha > 1$, $\sum u_n$ est absolument convergente. Pour $\alpha \leq 0$, $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Il reste ainsi à étudier le cas où $0 < \alpha \leq 1$. On effectue un développement limité du terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha-\beta}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha-\beta}}\right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + v_n.$$

La série $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées. D'autre part, $v_n \sim_{\infty} \frac{-1}{n^{2\alpha-\beta}}$. D'après la règle de comparaison à une série à terme constant, elle converge si, et seulement si, $2\alpha - \beta > 1$. Finalement, pour $0 < \alpha \leq 1$,

si $2\alpha - \beta > 1$, $\sum u_n$ converge (somme d'une série convergente et d'une série convergente). si $2\alpha - \beta \leq 1$, $\sum u_n$ diverge (somme d'une série divergente et d'une série convergente).

4. Si $\alpha < \beta$, en factorisant par $(-1)^n n^\beta$ au dénominateur, on peut écrire $u_n = \frac{1}{n^\beta (1 + (-1)^n n^{\alpha-\beta})}$. Ainsi, u_n est définie pour $n \geq 2$, et positif; en outre, $u_n \sim \frac{1}{n^\beta}$. La série converge dans ce cas si et seulement si $\beta > 1$.

5. Si $\alpha > \beta$, le terme dominant n'est plus le même, et on écrit désormais :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha (1 + (-1)^n n^{\beta-\alpha})}.$$

On voit ainsi que u_n est bien définie pour $n \geq 2$, et c'est une série alternée. On a $|u_n| \sim \frac{1}{n^\alpha}$, en conséquence :

Pour $\alpha > 1$, $\sum u_n$ est absolument convergente. Pour $\alpha \leq 0$, $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Il reste ainsi à étudier le cas où $0 < \alpha \leq 1$. On effectue un développement limité du terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha-\beta}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha-\beta}}\right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + v_n.$$

La série $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées. D'autre part, $v_n \sim_{\infty} \frac{-1}{n^{2\alpha-\beta}}$. D'après la règle de comparaison à une série à terme constant, elle converge si, et seulement si, $2\alpha - \beta > 1$. Finalement, pour $0 < \alpha \leq 1$,

si $2\alpha - \beta > 1$, $\sum u_n$ converge (somme d'une série convergente et d'une série convergente). si $2\alpha - \beta \leq 1$, $\sum u_n$ diverge (somme d'une série divergente et d'une série convergente).

6. Pour $\alpha > 1$, $\sum u_n$ est absolument convergente.

7. Pour $\alpha \leq 0$, $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

8. si $2\alpha - \beta > 1$, $\sum u_n$ converge (somme d'une série convergente et d'une série convergente).

9. si $2\alpha - \beta \leq 1$, $\sum u_n$ diverge (somme d'une série divergente et d'une série convergente).

Correction de l'exercice 11 ▲

Pour $|b| \leq 1$, la suite (b^n) , qui est bornée, est négligeable devant $2^{\sqrt{n}}$. Par conséquent, $(2^{\sqrt{n}} + b^n) \sim_{+\infty} 2^{\sqrt{n}}$, et $u_n \sim a^n$. On en déduit alors que, pour $|a| \geq 1$, le terme général u_n ne tend pas vers 0 : la série $\sum_n u_n$ est donc divergente; Pour $|a| < 1$, la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente car $|u_n| \sim_n |a^n|$, le terme de droite étant le terme général d'une série convergente. Si maintenant $|b| > 1$, alors la suite $(2^{\sqrt{n}})$ est négligeable devant (b^n) (faire le quotient en passant par la notation exponentielle). On en déduit que $u_n \sim_{+\infty} \frac{2^{\sqrt{n}} a^n}{b^n}$. Posons

$v_n = \frac{2^{\sqrt{n}} |a|^n}{|b|^n}$, et étudions la série $\sum_n v_n$ en appliquant le critère de d'Alembert. On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|a|}{|b|} 2^{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}.$$

Puisque $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ tend vers 0 (multiplier par la quantité conjuguée), on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|a|}{|b|}$. Si $|a| < |b|$, alors la série $\sum_n v_n$ converge, et la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente. Si $|a| \geq |b|$, alors $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$, et la série $\sum_n u_n$ est divergente.

Correction de l'exercice 12 ▲

On commence par distinguer les cas $|y| \leq 1$ et $|y| > 1$.

Si $|y| > 1$, alors $u_n \sim_{+\infty} \frac{x^n}{y^n}$. Si $|x| > |y|$, le terme général ne tend pas vers 0, et la série diverge. Si $|x| < |y|$, la série converge absolument par comparaison à une série géométrique convergente. Si maintenant $|y| = |x|$, il y a encore deux cas à distinguer. Si $x = y$, on a $u_n = \frac{1}{1+\frac{n}{y^n}} \rightarrow 1$ et donc le terme général ne tend pas vers 0, la série diverge. Si $x = -y$, le même raisonnement prouve que $|u_n| \rightarrow 1$, et la série est là aussi grossièrement divergente. Si $|y| \leq 1$, alors $u_n \sim_{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Lorsque $|x| < 1$, on déduit la convergence absolue de la série de terme général u_n . Lorsque $|x| > 1$, le terme général ne tend pas vers 0, et la série diverge. Reste à étudier les cas $x = 1$ et $x = -1$. Si $x = 1$, alors $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$, et par comparaison à une série à termes positifs divergente, la série $\sum_n u_n$ diverge. Si $x = -1$, alors

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n(1+y^n/n)} = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 - \frac{y^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-y)^n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &:= v_n + w_n + z_n. \end{aligned}$$

Or, $\sum_n v_n$ converge (par le critère des séries alternées), $\sum_n w_n$ et $\sum_n z_n$ convergent absolument, donc, si $x = -1$ et $|y| < 1$, la série de terme général $\sum_n u_n$ converge.

Correction de l'exercice 13 ▲

Dans tous les cas, on va comparer à une intégrale.

1. On doit séparer les cas $\alpha \leq 0$ et $\alpha > 0$. Si $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour tout $k \geq 2$, on a donc

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}$$

l'inégalité de gauche étant encore valable pour $k = 1$. On somme l'inégalité de gauche pour k allant de 1 à n , et celle de droite pour k allant de 2 à n . En rajoutant 1 à l'inégalité de droite, on trouve finalement :

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}.$$

En intégrant, il vient

$$\frac{1}{1-\alpha}(n+1)^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \leq S_n \leq \frac{1}{1-\alpha}n^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} + 1.$$

On en déduit que

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-\alpha} - \frac{1}{n^{1-\alpha}} \leq \frac{S_n}{\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \leq 1 + \frac{C}{n^{\alpha-1}}$$

où $C \in \mathbb{R}$. Puisque $\alpha < 1$, $n^{1-\alpha} \rightarrow +\infty$ et on en déduit que

$$S_n \sim_{+\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Si $\alpha \leq 0$, la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ est cette fois croissante. Le raisonnement est strictement identique, mais on doit inverser le sens des inégalités. On obtient exactement le même résultat.

2. Le raisonnement est toujours identique, mais cette fois on doit intégrer la fonction $\frac{1}{x}$ dont une primitive est $\ln x$. On en déduit que

$$S_n \sim_{+\infty} \ln n.$$

Correction de l'exercice 14 ▲

1. On intègre :

$$\int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} (x^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}).$$

On fait tendre x vers $+\infty$ et on trouve que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} a^{1-\alpha}.$$

2. On va comparer la somme à une intégrale. La fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ étant décroissante, on en déduit que, pour tout $k \geq 2$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$

On somme ces inégalités pour k allant de $n+1$ à N . On trouve :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}.$$

On fait tendre N vers $+\infty$. En utilisant le résultat de la question précédente, on trouve que

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

On en déduit que

$$\frac{R_n}{\frac{1}{n^{\alpha-1}(\alpha-1)}} \rightarrow 1$$

c'est-à-dire

$$R_n \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Correction de l'exercice 15 ▲

On se ramène à une somme en remarquant que

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln(k)$$

Puisque la fonction \ln est croissante, on a pour tout $k \geq 2$,

$$\int_{k-1}^k \ln(t) dt \leq \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt.$$

On somme cette inégalité pour k allant de 2 à n et, remarquant que $\ln(1) = 0$, on trouve

$$\int_1^n \ln(t) dt \leq \ln(n!) \leq \int_2^{n+1} \ln(t) dt.$$

Une primitive de $\ln(x)$ étant donnée par $x \ln x - x$, on trouve que

$$n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1) \ln(n+1) - (n+1) - 2 \ln 2 + 2.$$

On divise par $n \ln n$ pour prouver que $\ln(n!) \sim_{+\infty} n \ln n$. La seule chose non évidente à vérifier est que

$$\frac{(n+1) \ln(n+1)}{n \ln n} \rightarrow 1.$$

Pour cela, on écrit

$$\frac{(n+1) \ln(n+1)}{n \ln n} = \frac{n \ln(n+1) + \ln(n+1)}{n \ln n} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} + \frac{\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n \ln n}.$$

Correction de l'exercice 16 ▲

1. On fixe γ un réel tel que $1 < \gamma < \alpha$. La comparaison du comportement du logarithme et des polynômes en $+\infty$ montre que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\gamma \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^{-\beta}}{n^{\alpha-\gamma}} = 0$$

et ceci quelque soit la valeur de β . Autrement dit, $u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$. Par comparaison à une série de Riemann, la série est convergente.

2. On va comparer cette fois à la série de terme général $\frac{1}{n}$. On a en effet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} = +\infty.$$

Ainsi, pour n assez grand, on a

$$\frac{1}{n} \leq u_n.$$

Par comparaison à une série de Riemann divergente, la série de terme général u_n diverge.

3. Si $\beta \leq 0$, alors on a

$$\frac{1}{n} \leq u_n$$

et on conclut comme précédemment que la série est divergente. Si $\beta \neq 1$, on a

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \frac{1}{1-\beta} \left(\frac{1}{\ln^{\beta-1}(n)} - \frac{1}{\ln^{\beta-1} 2} \right).$$

Si $\beta > 1$, ceci tend vers $\frac{1}{\beta-1} \frac{1}{\ln^{\beta-1} 2}$ et on a même que pour tout entier $n \geq 2$

$$T_n \leq \frac{1}{\beta-1} \frac{1}{\ln^{\beta-1} 2}.$$

Si $\beta < 1$, on remarque immédiatement que (T_n) tend vers $+\infty$. Enfin, si $\beta = 1$, on sait que

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$$

et ceci tend aussi vers $+\infty$. Il reste à traiter le cas $\beta > 0$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est décroissante sur $[2, +\infty[$.

On a alors pour $k \geq 3$:

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} \leq \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}.$$

On somme ces inégalités pour k allant de 3 à n :

$$\int_3^{n+1} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}.$$

On en conclut que, si $\beta > 1$, la suite des sommes partielles de la série est majorée (par $\frac{1}{\beta-1} \frac{1}{\ln^{\beta-1} 2}$) et donc comme on a une série à termes positifs, la série est convergente. Si $\beta \leq 1$, en reprenant le même raisonnement qu'à la question précédente, on trouve que la suite des sommes partielles est minorée par une suite tendant vers $+\infty$. Elle tend donc elle-même vers $+\infty$. La série est divergente.

4. Si $\beta \leq 0$, alors on a

$$\frac{1}{n} \leq u_n$$

et on conclut comme précédemment que la série est divergente.

5. Si $\beta \neq 1$, on a

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \frac{1}{1-\beta} \left(\frac{1}{\ln^{\beta-1}(n)} - \frac{1}{\ln^{\beta-1} 2} \right).$$

Si $\beta > 1$, ceci tend vers $\frac{1}{\beta-1} \frac{1}{\ln^{\beta-1} 2}$ et on a même que pour tout entier $n \geq 2$

$$T_n \leq \frac{1}{\beta-1} \frac{1}{\ln^{\beta-1} 2}.$$

Si $\beta < 1$, on remarque immédiatement que (T_n) tend vers $+\infty$. Enfin, si $\beta = 1$, on sait que

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$$

et ceci tend aussi vers $+\infty$.

6. Il reste à traiter le cas $\beta > 0$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est décroissante sur $[2, +\infty[$. On a alors pour $k \geq 3$:

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} \leq \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}.$$

On somme ces inégalités pour k allant de 3 à n :

$$\int_3^{n+1} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}.$$

On en conclut que, si $\beta > 1$, la suite des sommes partielles de la série est majorée (par $\frac{1}{\beta-1} \frac{1}{\ln^{\beta-1} 2}$) et donc comme on a une série à termes positifs, la série est convergente. Si $\beta \leq 1$, en reprenant le même raisonnement qu'à la question précédente, on trouve que la suite des sommes partielles est minorée par une suite tendant vers $+\infty$. Elle tend donc elle-même vers $+\infty$. La série est divergente.

Correction de l'exercice 17 ▲

Posons, pour $a > 0$, $S(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$. Cette quantité est bien définie car on a affaire à une série à terme positif dont le terme général est équivalent à $\frac{a}{n^2}$. La fonction $x \mapsto \frac{a}{x^2+a^2}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit, par comparaison à une intégrale, que

$$\int_1^{N+1} \frac{a}{a^2+x^2} dx \leq \sum_{n=1}^N \frac{a}{n^2+a^2} \leq \int_0^N \frac{a}{a^2+x^2} dx.$$

On calcule ces intégrales et on trouve

$$\arctan\left(\frac{N+1}{a}\right) - \arctan\left(\frac{1}{a}\right) \leq \sum_{n=1}^N \frac{a}{n^2+a^2} \leq \arctan\left(\frac{N}{a}\right).$$

On fait tendre N vers $+\infty$ et on trouve

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{a}\right) \leq S(a) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Correction de l'exercice 18 ▲

On commence par remarquer que

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n+1)}.$$

On va alors pouvoir simplifier les sommes partielles à l'aide d'un changement d'indices. En effet, on a pour $N \geq 3$

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^n}{n^2-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^n}{n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^n}{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^n}{n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=4}^{N+2} \frac{(-1)^n}{n-1} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{(-1)^{N+1}}{2N} - \frac{(-1)^{N+2}}{2(N+1)}. \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (S_N) converge et que sa limite vaut $\frac{1}{4}$. C'est donc que la série converge et que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} = \frac{1}{4}.$$

Remarquons qu'on aurait pu démontrer autrement la convergence de la série (par convergence absolue ou par le critère des séries alternées); notre méthode prouve en même temps la convergence de la série et donne sa somme.

Correction de l'exercice 19 ▲

On a affaire à une série télescopique un peu compliquée. Les simplifications se font sur l'écriture de 3 termes consécutifs. Précisément, on a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{2}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

On prouve donc que la série converge, et que sa somme fait : $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. On aurait aussi pu séparer la série en deux séries télescopiques, en écrivant

$$u_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right).$$

Correction de l'exercice 20 ▲

On écrit que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

On dérive cette égalité (on a bien une somme finie) :

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2}.$$

On multiplie par $x \in]-1, 1[$, puis on fait tendre n vers l'infini. On trouve que

$$\sum_{k=1}^n kx^k = x \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \rightarrow \frac{x}{(1-x)^2}$$

(on a utilisé que $nx^n \rightarrow 0$). Ceci prouve à la fois la convergence de la série et le fait que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Correction de l'exercice 21 ▲

1. La première somme ne pose pas de problèmes :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{n}{n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} + e = 2e.$$

2. La deuxième somme est plus compliquée à cause du terme en n^2 . Pour qu'il se simplifie bien avec le $n!$, le plus commode est de l'écrire

$$n^2 = n(n-1) + n$$

de sorte que

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - 2}{n!} = \sum_{n \geq 2} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} - 2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = e + e - 2e = 0.$$

3. La méthode est similaire. Dit de façon algébrique, on va décomposer le polynôme X^3 dans la base $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$. En raisonnant d'abord avec le terme de plus haut degré, puis celui juste après, etc..., on trouve :

$$X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X(X-1) + X.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{n!} &= \sum_{n \geq 1} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} + 3 \sum_{n \geq 1} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n \geq 1} \frac{n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 3} \frac{1}{(n-3)!} + \sum_{n \geq 2} \frac{3}{(n-2)!} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} \\ &= 5e. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 22 ▲

1. Remarquons d'abord par récurrence sur n que la dérivée n -ième de $f(t) = \ln(1+t)$ est :

$$f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+t)^n}.$$

On va appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à cette fonction entre 0 et 1. Remarquons que si $t \in [0, 1]$, on a :

$$\left| f^{(n)}(t) \right| \leq (n-1)!$$

On a donc :

$$\left| f(1) - f(0) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| \leq \frac{1}{n},$$

ce qui en remplaçant les dérivées successives en zéro donne :

$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Faire tendre n vers $+\infty$ donne le résultat.

2. Avec l'indication, il vient :

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n (-t)^{k-1} \right) dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt.$$

Or, $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$, et

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

Il vient $|U_n - \ln 2| \leq \frac{1}{n+1}$, ce qui redonne bien le résultat de la première question.

Correction de l'exercice 23 ▲

1. Une intégration par parties donne

$$\int_0^\pi f(t) \sin((2n+1)t/2) dt = \frac{2}{2n+1} f(0) + \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi f'(t) \cos((2n+1)t/2) dt.$$

Or, il est d'une part clair que $\frac{2}{2n+1} f(0)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. D'autre part, on a

$$\left| \int_0^\pi f'(t) \cos((2n+1)t/2) dt \right| \leq \int_0^\pi |f'(t)| dt,$$

d'où l'on déduit que

$$\left| \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi f'(t) \cos((2n+1)t/2) dt \right| \leq \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi |f'(t)| dt.$$

Le membre de droite de cette inégalité tend vers 0, donc, par le théorème des gendarmes, il en est de même de $\frac{2}{2n+1} \int_0^\pi f'(t) \cos((2n+1)t/2) dt$. Finalement, on a bien prouvé que

$$\int_0^\pi f(t) \sin((2n+1)t/2) dt \rightarrow 0.$$

2. C'est un calcul classique. On écrit $\cos(kt) = \Re e(e^{ikt})$ et on utilise la somme d'une série géométrique de raison différente de 1 (puisque $t \in]0, \pi]$). On obtient

$$\begin{aligned} A_n(t) &= \frac{1}{2} + \Re e \left(\frac{e^{it} - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} \right) = \frac{1}{2} + \Re e \left(e^{i(n+1)t/2} \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sin(nt/2) \cos((n+1)t/2)}{\sin(t/2)}. \end{aligned}$$

Une petite formule de trigo donne

$$A_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \sin(t/2)} \times (\sin((2n+1)t/2) + \sin(-t/2))$$

ce qui finalement donne le résultat.

3. On calcule l'intégrale en faisant deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt &= \left[(at^2 + bt) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi (2at + b) \frac{\sin(nt)}{n} dt \\ &= 0 - \left[(2at + b) \frac{-\cos(nt)}{n^2} \right]_0^\pi - \int_0^\pi 2a \frac{\cos(nt)}{n^2} dt \\ &= \frac{(2a\pi + b)(-1)^n - b}{n^2}. \end{aligned}$$

Ceci vaudra $1/n^2$ pour $b = -1$ et $a = 1/2\pi$. On déduit alors

$$\int_0^\pi (at^2 + bt)A_n(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt + S_n = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$

4. On a donc prouvé que

$$S_n - \frac{\pi^2}{6} = \int_0^\pi f(t) \sin(2(n+1)t/2)dt,$$

avec $f(t) = \frac{at^2 + bt}{2\sin(t/2)}$. Pour conclure, il s'agit de prouver que f est de classe C^1 en 0. Clairement, f est de classe C^1 sur $]0, \pi]$. Pour prouver que f est dérivable en 0 et que sa dérivée y est continue, on peut appliquer le théorème de prolongement d'une dérivée. On remarque ainsi que, pour $t \in]0, \pi]$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{2(2at + b)\sin(t/2) - (at^2 + bt)\cos(t/2)}{4\sin^2(t/2)} \\ &= \frac{2(2at + b)(t/2 + o(t^2)) - (at^2 + bt)(1 - t^2/2 + o(t^2))}{t^2 + o(t^2)} \\ &= \frac{at^2 + o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} \rightarrow a. \end{aligned}$$

Par le théorème de prolongement d'une dérivée, f est de classe C^1 en 0. On peut alors appliquer le résultat des questions précédentes.

Correction de l'exercice 24 ▲

On remarque d'abord que la série est convergente. Il s'agit d'une série alternée $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$ où $a_n = \frac{1}{n \ln(n+1)}$ est une suite décroissante vers 0. Notons S_n la somme partielle d'ordre n de cette série et S cette somme. Alors on peut appliquer le critère des séries alternées, et on sait que S est encadré par deux sommes partielles consécutives. Plus précisément ici, en tenant compte du fait que $S_{2n-1} \leq S_{2n}$, on a $S_{2n-1} \leq S \leq S_{2n}$. Il suffit donc de calculer S_{2n-1} et S_{2n} jusqu'à ce que $S_{2n} - S_{2n-1} = \frac{1}{2n \ln(2n+1)} \leq 10^{-5}$. Ceci donne :

```
import math
S=-1/math.log(2)
T=S+1/(2*math.log(3))
n=2
while (T-S)<0.00001 :
    S=T-1/((2*n-1)*math.log(2n))
    T=S+1/((2*n)*math.log(2*n+1))
    n=n+1
print T,S
```

Correction de l'exercice 25 ▲

1. Pour $k \geq 1$, la fonction $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur $[k, k+1]$. En particulier, pour tout $x \in [k, k+1]$, on a

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}.$$

Si on intègre cette inégalité entre k et $k+1$, on trouve

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx = (k+1 - k) \times \frac{1}{k} = \frac{1}{k}.$$

L'inégalité de droite se démontre de la même façon, en partant de l'inégalité

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{x}$$

valable pour tout $x \in [k-1, k]$, vraie dès que $k \geq 2$.

2. Sommons la première inégalité pour k allant de 1 à n . On trouve par la relation de Chasles

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leq H_n.$$

Le membre de gauche fait exactement $\ln(n+1)$. Pour la deuxième partie, on somme la deuxième inégalité pour k allant de 2 à n . On trouve

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n).$$

Il suffit ensuite d'ajouter 1 pour conclure.

3. Pour $n \geq 2$, on a $\ln(n) > 0$ et on obtient

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

De plus,

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $H_n/\ln(n) \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow +\infty$.

4. Soit $n \geq 1$. Alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n).$$

Mais la question 1. avec $k = n+1$ nous dit que

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1) - \ln(n).$$

Ainsi, on en déduit que $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et que (u_n) est décroissante. De même

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n)$$

et on démontre que cette quantité est positive ou nulle en utilisant l'autre inégalité démontrée à la première question. Ainsi, (v_n) est croissante. Enfin,

$$u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(1) = 0.$$

Les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

5. Pour réaliser cet algorithme, on peut remarquer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $v_n \leq a \leq u_n$, et donc qu'il suffit de calculer u_n et v_n de sorte que $u_n - v_n < a$ pour obtenir un encadrement de γ à a près. On obtient donc def gamma(a) :
`n=1 H=1 u=1-math.log(1) v=1-math.log(2) while (u-v>a) : n=n+1
H=H+1/n u=H-math.log(n) v=H-math.log(n+1) return u,v`

Correction de l'exercice 26 ▲

1. Il suffit de remarquer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{5^n}$$

et que le membre à droite de cette inégalité et le terme général d'une série convergente. On peut aussi appliquer la règle de d'Alembert (ce qui est légitime puisqu'on a affaire à une série à termes positifs). Observant que

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{25} \times \frac{2k-1}{2k+1} \rightarrow \frac{1}{25}$$

on en déduit que la série de terme général u_n est convergente.

2. L'équation précédente montre qu'en réalité

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{1}{25}.$$

Par récurrence, on obtient que

$$u_{n+k+1} \leq 25^{-k} u_{n+1}.$$

Ainsi,

$$R_n \leq u_{n+1} \times \sum_{k=0}^{+\infty} 25^{-k} = \frac{25}{24} u_{n+1}.$$

3. Dès $n = 2$, on a $R_n < 0,001$. Une valeur approchée à 10^{-3} près est donc donnée par $u_1 + u_2 \simeq 0,202$.

Correction de l'exercice 27 ▲

L'idée est qu'une fonction vérifiant une telle propriété décroît très vite vers 0 en $+\infty$, plus vite que n'importe quelle fonction e^{-Mx} . Concrètement, avec des quantificateurs, cela se traduit comme suit. Soit $M > 0$. Alors il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x \geq A$, on a $\frac{f'(x)}{f(x)} \leq -M$. Pour $A \leq x \leq y$, on a en intégrant puis en passant à l'exponentielle, que $f(y) \leq f(x)e^{-M(y-x)}$. Si on fixe $x = A$ et si $y = n$ est un entier, on obtient que $0 \leq f(n) \leq Ce^{-Mn}$, où C est une constante. Ceci prouve que la série est convergente. Cherchons désormais un équivalent du reste. Pour $n \geq A$ et $p \geq 0$, on a

$$f(n+p) \leq f(n)e^{-Mp}.$$

Si on somme ceci pour p de 0 à $+\infty$, on trouve

$$f(n) \leq R_n \leq f(n) \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-pM} = \frac{f(n)}{1 - e^{-M}}.$$

Fixons désormais $\varepsilon > 0$. Si M est choisi de sorte que $\frac{1}{1 - e^{-M}} \leq 1 + \varepsilon$, alors on peut trouver A tel que, pour tout $n \geq A$, on a

$$f(n) \leq R_n \leq (1 + \varepsilon)f(n).$$

Ceci prouve que $f(n) \sim_{+\infty} R_n$.

Correction de l'exercice 28 ▲

1. Par une récurrence immédiate, on remarque d'abord que la suite (u_n) est une suite de réels positifs. Ensuite, on a $u_{n+1}/u_n = (3n-1)/3n < 1$. La suite (u_n) est donc décroissante, et minorée, donc convergente.

2. On écrit, en tenant compte des propriétés algébriques du logarithme, que

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln \left((n+1)^{1/3} u_{n+1} \right) - \ln \left(n^{1/3} u_n \right) \\ &= \ln \left(\frac{(n+1)^{1/3} u_{n+1}}{n^{1/3} u_n} \right) \\ &= \ln \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1/3} \frac{3n-1}{3n} \right) \\ &= \frac{1}{3} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{3n} \right). \end{aligned}$$

On conclut ensuite en utilisant le développement limité du logarithme :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{3n} - \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{3n} - \frac{1}{18n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{2}{9n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

On a $v_{n+1} - v_n \sim_{+\infty} \frac{-2}{9n^2}$. Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum_n (v_{n+1} - v_n)$ est convergente. C'est classique ! On passe d'une série télescopique à une suite. Pour $N \geq 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{N-1} (v_{n+1} - v_n) = v_N - v_0.$$

Puisque la suite $\left(\sum_{n=1}^N (v_{n+1} - v_n) \right)_N$ est convergente, il en est de même de la suite $(v_N)_N$.

3. On écrit, en tenant compte des propriétés algébriques du logarithme, que

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln \left((n+1)^{1/3} u_{n+1} \right) - \ln \left(n^{1/3} u_n \right) \\ &= \ln \left(\frac{(n+1)^{1/3} u_{n+1}}{n^{1/3} u_n} \right) \\ &= \ln \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1/3} \frac{3n-1}{3n} \right) \\ &= \frac{1}{3} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{3n} \right). \end{aligned}$$

On conclut ensuite en utilisant le développement limité du logarithme :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{3n} - \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{3n} - \frac{1}{18n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{2}{9n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

4. On a $v_{n+1} - v_n \sim_{+\infty} \frac{-2}{9n^2}$. Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum_n (v_{n+1} - v_n)$ est convergente.

5. C'est classique ! On passe d'une série télescopique à une suite. Pour $N \geq 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{N-1} (v_{n+1} - v_n) = v_N - v_0.$$

Puisque la suite $(\sum_{n=1}^N (v_{n+1} - v_n))_N$ est convergente, il en est de même de la suite $(v_N)_N$.

6. On a $\ln(n^{1/3} u_n)$ qui tend vers λ . Par composition des limites et par continuité de la fonction exponentielle en λ , $n^{1/3} u_n$ tend vers e^λ . Ainsi, $u_n \sim_{+\infty} \frac{e^\lambda}{n^{1/3}}$. Par comparaison à une série de Riemann divergente, la série de terme général (u_n) n'est pas convergente.

7. La suite (u_n) est décroissante (on l'a déjà remarqué à la première question). De plus, l'équivalent obtenu à la question précédente nous dit que (u_n) tend vers 0. Ainsi, on peut appliquer le critère des séries alternées et conclure que la série de terme général $(-1)^n u_n$ est convergente.

Correction de l'exercice 29 ▲

1. On écrit $\sum_{n=1}^N y_n = x_{N+1} - x_1$ (la somme est télescopique). Ainsi, la suite des sommes partielles $(\sum_{n=1}^N y_n)$ converge si et seulement si la suite (x_N) converge.

2. Un petit calcul prouve que :

$$v_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1.$$

On effectue un développement limité de v_n -il faut pousser le développement du logarithme jusqu'à l'ordre 3 - et on a :

$$v_n = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général v_n est donc convergente.

3. On écrit $v_n = \ln(u_{n+1}/u_n) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. Puisque la série $\sum_n v_n$ converge, d'après la première question la suite $(\ln(u_n))$ converge vers un réel l , et en passant à l'exponentielle, on trouve que la suite (u_n) converge vers le réel e^l qui est strictement positif. Revenant à la définition de (u_n) , ceci donne le résultat avec $C = e^{-l}$.

Correction de l'exercice 30 ▲

1. On va faire un développement limité de v_n . Pour cela, on l'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} v_n &= \ln \left(\frac{(n+1)^\beta u_{n+1}}{n^\beta u_n} \right) \\ &= \ln \left(\frac{(n+1)^\beta}{n^\beta} \right) + \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \\ &= \beta \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \\ &= \frac{\alpha + \beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

La série de terme général v_n converge donc si et seulement si $\beta = -\alpha$.

2. On choisit donc $\beta = -\alpha$ et on remarque que la somme partielle de la série de terme général v_n correspond à une somme télescopique de $\ln(n^\beta u_n)$. En effet, on a

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \ln(n^\beta u_n) - \ln(u_1).$$

Puisque la série de terme général v_n converge, on en déduit que la suite $(\ln(n^\beta u_n))$ converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$. Par composition des limites, $(n^\beta u_n)$ converge vers $A = e^l$. Autrement dit, $u_n \sim_{+\infty} A n^{-\alpha}$.

Correction de l'exercice 31 ▲

Notons S_n la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!}$. Par le critère des séries alternées,

$$S_{2n-1} < \cos(1) < S_{2n} = S_{2n-1} + \frac{1}{(4n)!}.$$

On multiplie ces deux inégalités par $(4n-2)!$ pour trouver

$$(4n-2)!S_{2n-1} < (4n-2)!\cos(1) < (4n-2)!S_{2n-1} + \frac{1}{4n(4n-1)}.$$

Posons $N = (4n-2)!S_{2n-1}$ qui est un entier. On a donc

$$N < (4n-2)!\cos(1) < N + 1.$$

Or, si $\cos(1)$ était rationnel et s'écrivait donc p/q , pour n assez grand, $(4n-2)!\cos(1)$ serait entier (car $(4n-2)!$ est un multiple de q si $4n-2 \geq q$). $(4n-2)!\cos(1)$ serait donc un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs. C'est absurde!

Correction de l'exercice 32 ▲

Remarquons que l'inégalité est encore équivalente à $0 \leq v_n - u_n \leq w_n - u_n$. Or, la série $\sum (w_n - u_n)$ converge, puisque chacune des séries $\sum w_n$ et $\sum u_n$ converge. Par le théorème de majoration, on en déduit que la série $\sum (v_n - u_n)$ converge. En écrivant $v_n = (v_n - u_n) + u_n$ et en utilisant que les deux séries $\sum (v_n - u_n)$ et $\sum u_n$ convergent, on en déduit que $\sum v_n$ converge.

Correction de l'exercice 33 ▲

On a $(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 \geq 0$ ce qui prouve que $0 \leq \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2}(u_n + v_n)$. Par majoration d'une série à termes positifs par le terme général d'une série convergente, la série de terme général $\sqrt{u_n v_n}$ est convergente. D'autre part, on a $0 \leq \max(u_n, v_n) \leq u_n + v_n$ (le maximum est toujours égal à l'un ou l'autre, donc inférieur ou égal à la somme des deux puisqu'on a affaire à des séries à termes positifs). Pour la même raison, la série $\sum \max(u_n, v_n)$ converge.

Correction de l'exercice 34 ▲

1. Puisque la série $\sum_n u_n$ converge, la suite (u_n) converge vers zéro. Il existe donc un entier $N \geq 0$ tel que, pour $n \geq N$, on a $0 \leq u_n \leq 1$. Puisque $\alpha > 1$, on a alors, pour $n \geq N$, $0 \leq u_n^\alpha \leq u_n$. Puisque l'on travaille avec des séries à termes positifs, ceci entraîne la convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n^\alpha$.

2. Deux cas sont possibles :

ou bien (u_n) ne converge pas vers 0. Dans ce cas, la suite (u_n^α) ne converge pas non plus vers 0, et donc la série $\sum_n u_n^\alpha$ diverge ; ou bien (u_n) converge vers 0. Dans ce cas, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on a $0 \leq u_n \leq 1$. Puisque $\alpha \in]0, 1[$, on en déduit que $0 \leq u_n \leq u_n^\alpha$.

Ainsi, la série $\sum_n u_n^\alpha$ est aussi divergente.

3. ou bien (u_n) ne converge pas vers 0. Dans ce cas, la suite (u_n^α) ne converge pas non plus vers 0, et donc la série $\sum_n u_n^\alpha$ diverge ;

4. ou bien (u_n) converge vers 0. Dans ce cas, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on a $0 \leq u_n \leq 1$. Puisque $\alpha \in]0, 1[$, on en déduit que $0 \leq u_n \leq u_n^\alpha$.

Correction de l'exercice 35 ▲

1. Il suffit d'étudier la fonction. Sa dérivée est $x \mapsto 1/(1+x)^2 \geq 0$, donc la fonction est croissante.

2. On distingue deux cas : si (u_n) tend vers 0, alors $u_n \sim_{+\infty} v_n$, et ces deux suites sont positives. Par le critère d'équivalence, on en déduit que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ ont la même nature. Si (u_n) ne tend pas vers 0 (ce qui implique que $\sum_n u_n$ diverge), alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $u_n \geq \varepsilon$ (rappelons que $u_n \geq 0$). Mais alors, d'après la première question, on a $v_n \geq \varepsilon/(1+\varepsilon) > 0$, et donc la suite (v_n) ne converge pas vers 0. Ainsi, la série $\sum_n v_n$ est aussi divergente, et dans ce cas, les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ ont bien la même nature.

Correction de l'exercice 36 ▲

Procédons par l'absurde. On suppose donc que (nu_n) ne tend pas vers 0. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on peut trouver $q \geq N$ avec $qu_q \geq \varepsilon$. Autrement dit, on a $u_q \geq \varepsilon/q$. Puisque (u_n) est décroissante, on a encore $u_k \geq \varepsilon/q$ pour tout $k \leq q$. Posons $p = \lfloor q/2 \rfloor$, de sorte que $p \geq \lfloor N/2 \rfloor$ et $2p - p \geq \frac{q}{2} - 1$. Alors

$$\sum_{k=p}^{2p} u_k \geq \sum_{k=p}^{2p} \frac{\varepsilon}{q} \geq \frac{q}{2} \times \frac{\varepsilon}{q} \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En notant p_N l'entier p construit pour le choix de N , la suite (p_N) tend vers $+\infty$, et on a pour tout entier N ,

$$\sum_{k=p_N}^{2p_N} u_k \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, si la série convergeait, ce serait le cas de la suite des sommes partielles $S_p = \sum_{k=1}^p u_k$ et on devrait avoir

$$\sum_{k=p_N}^{2p_N} u_k = S_{2p_N} - S_{p_N-1} \rightarrow 0.$$

On obtient deux résultats contradictoires. L'hypothèse de départ est fausse, et donc (nu_n) tend vers 0.

Correction de l'exercice 37 ▲

Puisque les termes généraux des deux séries sont positifs, il suffit de démontrer que les sommes partielles d'une des séries sont majorées si et seulement si les sommes partielles de l'autre le sont. L'idée est de considérer dans les sommes partielles de $\sum_n u_n$ des blocs dont les indices sont compris entre 2^k et $2^{k+1} - 1$ pour pouvoir comparer aux sommes partielles de la série $\sum_n 2^n u_n$. Pour cela, le point clé est l'encadrement suivant :

$$2^k u_{2^{k+1}} \leq (2^{k+1} - 2^k) u_{2^{k+1}-1} \leq u_{2^k} + \dots + u_{2^{k+1}-1} \leq (2^{k+1} - 2^k) u_{2^k} \leq 2^k u_{2^k}.$$

Ainsi, supposons que $\sum_k 2^k u_{2^k}$ est convergente, et soit M tel que, pour tout K , on a $\sum_{k=0}^K 2^k u_{2^k} \leq M$. Alors, considérons N un entier et fixons K tel que $N \leq 2^{K+1} - 1$. On a

$$\sum_{n=1}^N u_n \leq \sum_{n=1}^{2^{K+1}-1} u_n \leq \sum_{k=0}^K \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} u_j \leq \sum_{k=0}^K 2^k u_{2^k} \leq M.$$

On en conclut que $\sum_n u_n$ est convergente. Réciproquement, supposons que $\sum_n u_n$ est convergente, et soit M tel que, pour tout N , on a $\sum_{n=1}^N u_n \leq M$. Alors, pour tout entier K , on a

$$\sum_{k=0}^K 2^k u_{2^k} = u_1 + \sum_{k=0}^{K-1} 2^{k+1} u_{2^{k+1}} \leq u_1 + 2 \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} u_j \leq u_1 + 2 \sum_{n=1}^{2^K} u_n \leq u_1 + 2M.$$

Ainsi, la série $\sum_n 2^n u_{2^n}$ est convergente.

Correction de l'exercice 38 ▲

1. Par définition, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \varepsilon.$$

On a alors, pour tout $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \cdots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \times u_{n_0} \\ &\leq (l + \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on a $0 \leq u_n \leq (l + \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}$. Or, puisque $0 < l + \varepsilon < 1$, la série géométrique $\sum_n l^n$ est convergente. Par le théorème de majoration des séries à termes positifs, $\sum_n u_n$ converge.

2. Par définition, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \varepsilon.$$

On a alors, pour tout $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \cdots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \times u_{n_0} \\ &\leq (l + \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}. \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, on a $0 \leq u_n \leq (l + \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}$. Or, puisque $0 < l + \varepsilon < 1$, la série géométrique $\sum_n l^n$ est convergente. Par le théorème de majoration des séries à termes positifs, $\sum_n u_n$ converge.

4. Puisque $l > 1$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $l - \varepsilon > 1$. Il existe alors un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq l - \varepsilon.$$

Par un raisonnement en tout point similaire à celui de la question précédente, on obtient

$$u_n \geq (l - \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}.$$

Puisque $(l - \varepsilon) > 1$, la série $\sum_n (l - \varepsilon)^n$ est divergente. Il en est de même de $\sum_n u_n$.

5. Pour $u_n = \frac{1}{n^2}$, u_{n+1}/u_n tend vers 1 et $\sum_n u_n$ converge. Pour $u_n = 1$, $u_{n+1}/u_n = 1$ et $\sum_n u_n$ diverge. On ne peut donc rien conclure dans ce cas. La règle énoncée dans cet exercice s'appelle la règle de d'Alembert. Elle est très utile pour étudier des séries où interviennent des puissances, des factorielles....